I. Portefeuilletheorie

- 1952 von Harry M. Markowitz entwickelt
- Rendite **und** Risiko werden betrachtet
- Bewertung erfolgt nach den Auswirkungen auf das Gesamtportefeuille

Annahmen:

- Risiko einer Aktie := Streuung der Renditen um ihren Erwartungswert
- Renditen sind normalverteilt
  → μ und σ beschreiben vollkommen die Verteilung
- Modell über nur eine Periode

I.1. Darstellung

- Investoren handeln rational
  - Beurteilung erfolgt anhand der errechneten Standardabweichung und erwarteten Rendite
  - Ziel ist die Nutzenmaximierung des Portefeuilles
  - Investoren sind risikoavers → konkave Risiko-Nutzen-Funktion
- Vollkommener Markt
  - keine Steuern und Transaktionskosten
  - vollkommene Konkurrenz
  - Aktien sind unendlich teilbar
- Keine Anlage oder Aufnahme von Kapital zum Zins auf risikofreie Anlagen
- Keine Leerverkäufe

I.1. Darstellung

Erwartungswert der Rendite eines Portefeuilles:

$$E(r_P)=\sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Varianz eines Portefeuilles:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j}$$

I.1. Darstellung

Varianz-/Kovarianzmatrix für n Aktien:

Aktie	1	2	...	n
1	$x_1^2 \sigma_1^2$	$x_1 \, x_2 \, \sigma_{1,2}$	...	$x_1 \, x_n \, \sigma_{1,n}$
2	$x_2 \, x_1 \, \sigma_{2,1}$	$x_2^2 \, \sigma_2^2$	...	$x_2 \, x_n \, \sigma_{2,n}$
...	...	...	...	...
n	$x_n \, x_1 \, \sigma_{n,1}$	$x_n \, x_2 \, \sigma_{n,2}$	...	$x_n^2 \, \sigma_n^2$

I.1. Darstellung

$$\sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} p_k \left[r_{i,k} - E(r_i)\right]\left[r_{j,k} - E(r_j)\right]$$

$$i = j \Rightarrow \sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} p_k \left[r_{i,k} - E(r_i)\right]\left[r_{j,k} - E(r_j)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k \left[r_{i,k} - E(r_i)\right]^2 = \sigma_i^2$$

$$i \neq j \Rightarrow \sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} p_k \left[r_{i,k} - E(r_i)\right]\left[r_{j,k} - E(r_j)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k \left[r_{j,k} - E(r_j)\right]\left[r_{i,k} - E(r_i)\right] = \sigma_{j,i}$$

I.1. Darstellung

$$\Rightarrow \quad \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j}$$

Korrelationskoeffizient: $\rho_{i,j} = \dfrac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j} \Leftrightarrow \sigma_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$

$$\Rightarrow \quad \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

entspricht: $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j}$

Diversifikationseffekt am Beispiel von n=2 Aktien:

- $\rho_{A,B} = 1$

$$\sigma_P^2 = x^2 \sigma_A^2 + (1-x)^2 \sigma_B^2 + 2x(1-x)\, 1 \sigma_A \sigma_B$$

$$\Leftrightarrow \sigma_P^2 = (x\sigma_A + (1-x)\sigma_B)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_P = x\sigma_A + (1-x)\sigma_B$$

➔ Portefeuillerisiko = mit den jeweiligen Anteilen gewichtetes Durchschnittsrisiko der Aktien
➔ keine Reduzierung durch die Portefeuillebildung

- $\rho_{A,B} = -1$

$$\Rightarrow \sigma_P = x\sigma_A - (1-x)\sigma_B$$

1. Darstellung

➔ Risikoreduzierung durch Portefeuillebildung

→ Portefeuillerisiko kann bei Ermittlung der entsprechenden Gewichtungen auf Null reduziert werden

ca) $\rho_{A,B} = 0$

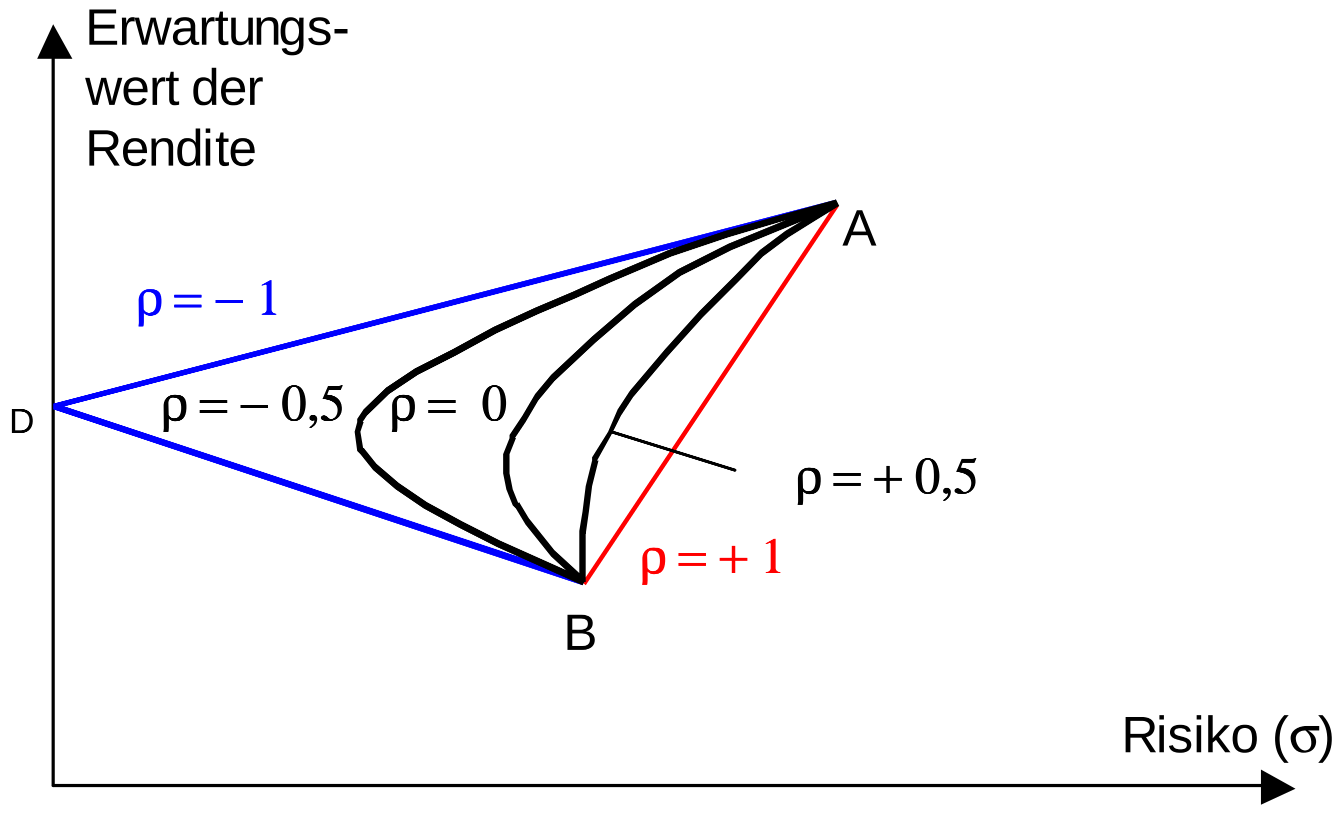
$$\Rightarrow \sigma_P = \sqrt{x_A^2\,\sigma_A^2 + x_B^2\,\sigma_B^2}$$

cb) $-1 < \rho_{A,B} < 0 \vee 0 < \rho_{A,B} < 1$

$$\Rightarrow \sigma_P = \sqrt{x_A^2\,\sigma_A^2 + x_B^2\,\sigma_B^2 + 2x_A x_B \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}$$

➔ Risikoreduzierung durch Portefeuillebildung

I.1. Darstellung



I.1. Darstellung

➔ Für die Portefeuillediversifizierung ist die Korrelation der Erwartungswerte der einzelnen Renditen entscheidend.

Annahmen:

- $x_i = \frac{1}{n}$
- $\sigma_i^2 = \sigma^2$
- $\sigma_{i,j} = COV$

PF-Risiko:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j COV$$

Dann gilt:

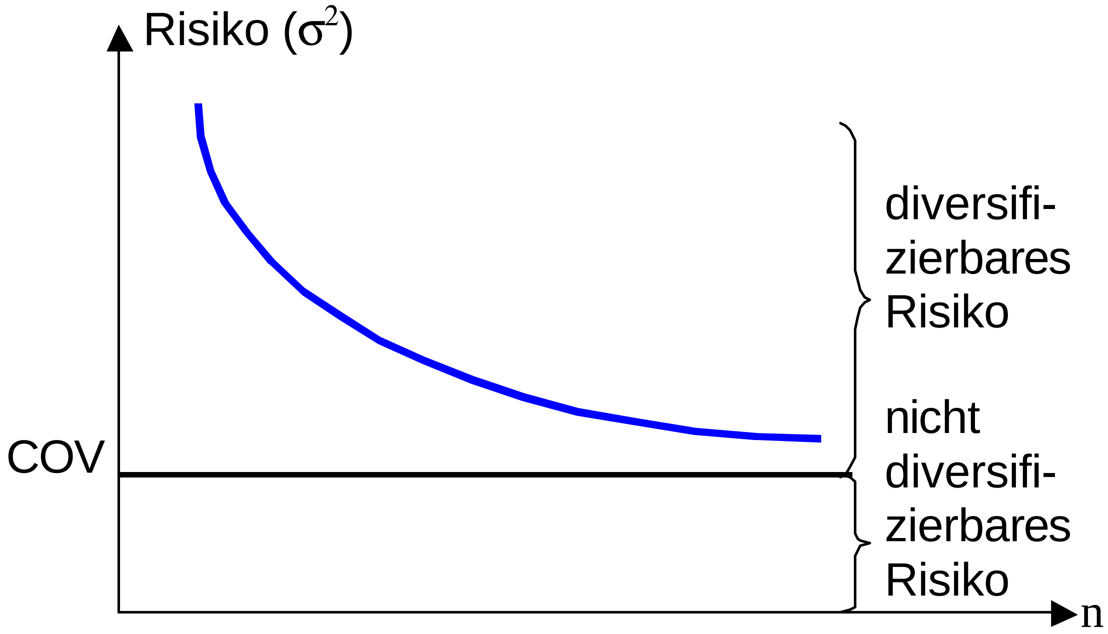
$$\sigma_P^2 = n\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 + 2\left(\frac{n^2-n}{2}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)COV = \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{n^2-n}{n^2}COV$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)COV$$

I.1. Darstellung

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_P^2 = 0 + COV$$

Für n→∞ gilt: $\sigma_P^2 \to COV = \rho\sigma^2$ wobei $\rho_{i,j} = \rho$



Ermittlung der effizienten Portefeuilles:

- Ein Portefeuille ist effizient, wenn kein anderes Portefeuille existiert, daß
  - bei gleicher erwarteter Rendite ein niedrigeres Risiko besitzt und
  - bei gleichem Risiko eine höhere erwartete Rendite verspricht.

Zielfunktion: $$\mathbf{min!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, x_j \, \sigma_{i,j}$$

Nebenbedingungen: $$E(r_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(r_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad x_i \geq 0$$

- Ermittlung über quadratische Optimierung

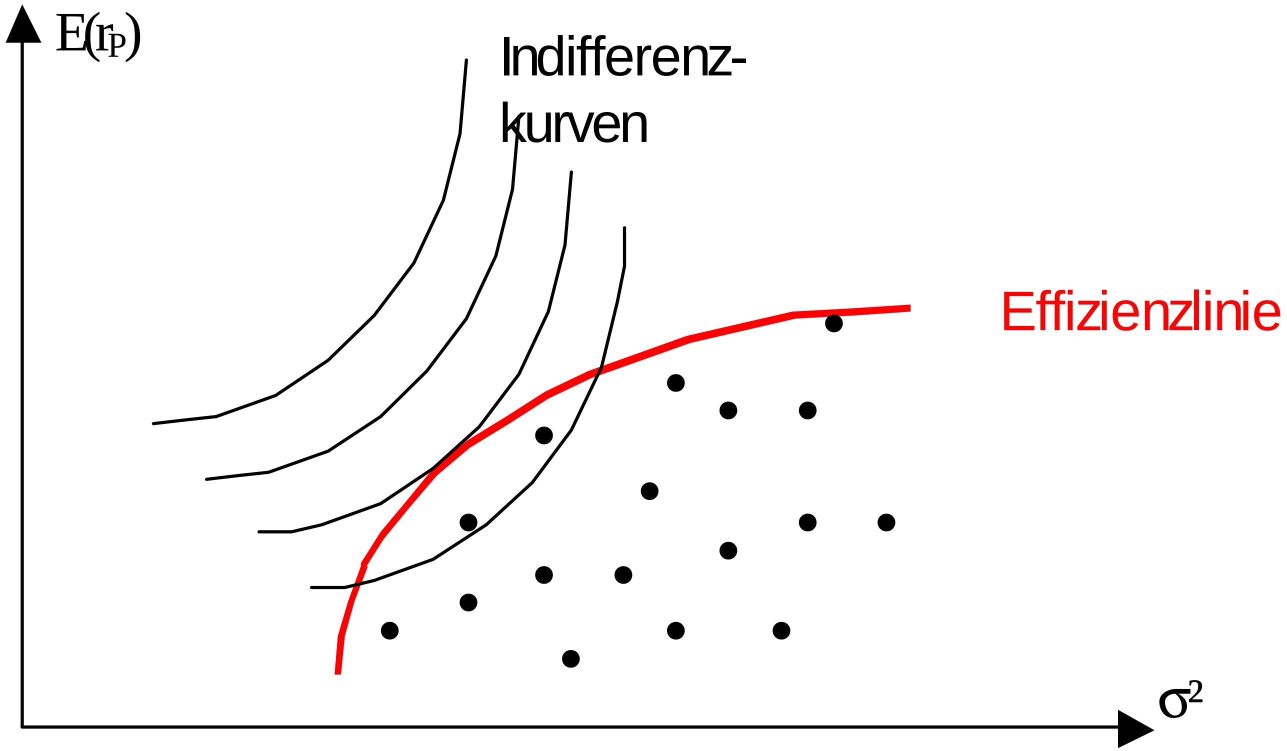
➔ Effizienzlinie

Ermittlung des optimalen Portefeuilles:

- Präferenzen der Anleger werden durch Indifferenzkurven dargestellt
- Risikoaversion der Anleger
  → konkave Indifferenzkurven

➔Tangentialpunkt von Effizienzlinie und Indifferenzkurve ergibt das für den jeweiligen Anleger optimale Portefeuille

I.1. Darstellung



Kritik:

- Betrachtung der Auswirkung auf das Portefeuille
  → Portefeuille-Entscheidungen können dominieren
- Stochastische Abhängigkeiten zwischen den jeweiligen Aktien werden aufgezeigt
- Ineffiziente Portefeuilles können unabhängig von den Präferenzen eliminiert werden
- Varianz/Kovarianz sind ein Risikomaß für eine Aktie sowie ein Maß für den Gesamtrisikobeitrag

- Probleme bei der Datenermittlung
  (n Erwartungswerte für n Renditen sowie n Varianzen und $0{,}5(n^2-n)$ Kovarianzen)

I.2. Kritik

- Prämissenkritik:
  - keine unendliche Teilbarkeit
  - Begrenzung auf eine Periode (Zeithorizont)
  - Annahme, daß Renditen normalverteilt sind
    oder
    die Annahme, daß die Risiko-Nutzen-Funktion der Anleger quadratisch ist → steigende Risikoaversion

Grundzüge der Kapitalmarkttheorie
II. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

1. Darstellung des Modells
1.1 Annahmen:

- Investoren handeln nach der Portefeuilletheorie nach Markowitz - die Annahmen der Portefeuilletheorie gelten

- homogene Erwartungen über Erwartungswert, Varianzen und Kovarianzen der Renditen
  → Informationen für alle Investoren gleichermaßen und kostenfrei zugänglich

- Leerverkäufe unbegrenzt möglich

- Aufnahme sowie Anlage zum Zins für risikofreie Anlagen für jeden Marktteilnehmer unbegrenzt und zum gleichen Satz möglich

- Umlauf an Anlagemöglichkeiten konstant

- alle in der Volkswirtschaft auftretenden Anlagemöglichkeiten werden am Markt gehandelt

- Kapitalmarkt im Gleichgewicht

1.2 Herleitung der Kapitalmarktlinie

aus den Annahmen folgt:
→ alle Marktteilnehmer ermitteln dieselbe Effizienzlinie

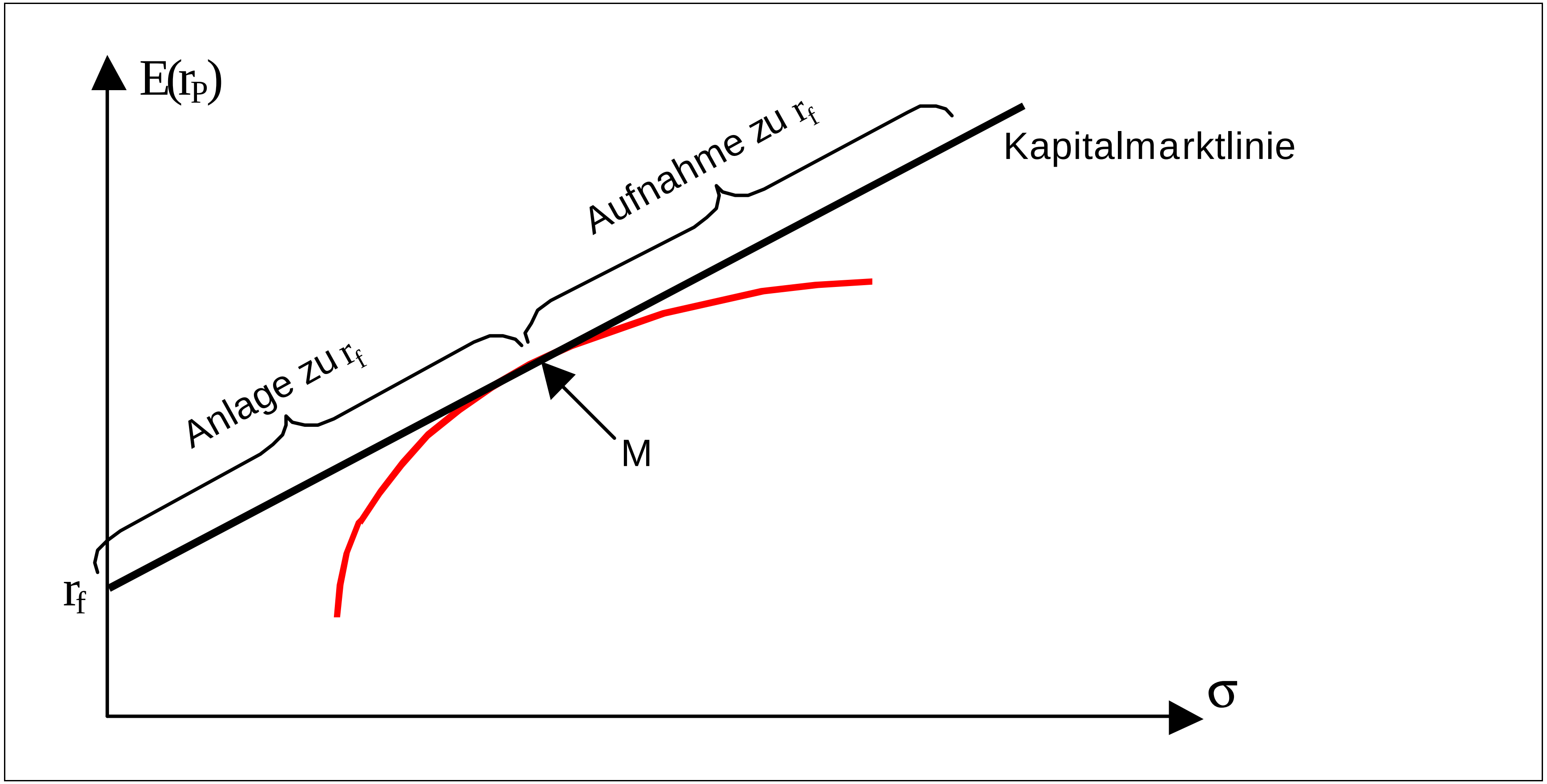
→ alle Marktteilnehmer ermitteln dasselbe effiziente Portefeuille risikobehafteter Anlagen

dies ist das Marktportefeuille, da Kapitalmarktgleichgewicht herrscht

Risikoneigung der Investoren ist ohne Einfluß auf Struktur dieses Portefeuilles

Risikoneigung durch Aufteilung auf Marktportefeuille und Anlage bzw. Aufnahme zum Zins für risikofreie Anlagen berücksichtigt

Kapitalmarktlinie als Linie effizienter Portefeuilles



die Kapitalmarktlinie zeigt Risiko-Rendite-Kombinationen für effiziente Portefeuilles

erwartete Rendite und Varianz der Rendite eines Portefeuilles sind vom Anteil α des Gesamtporte-feuilles abhängig, der in das Marktportefeuille investiert wurde:

erwartete Rendite:

$$E(r_P) = E(\alpha r_M + (1-\alpha) r_f)$$
$$\Leftrightarrow E(r_P) = \alpha E(r_M) + (1-\alpha) r_f$$
$$\Leftrightarrow E(r_P) = r_f + \alpha E(r_M) - \alpha r_f$$
$$\Leftrightarrow E(r_P) = r_f + \alpha (E(r_M) - r_f)$$

Varianz der Portefeuillerendite:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2 \sigma_M^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{rf}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{M,rf}$$

mit $\sigma_{rf}^2 = 0$ und $\sigma_{M,rf} = 0$ folgt:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2 \sigma_M^2$$

die **Steigung der Kapitalmarktlinie** ist die Beziehung zwischen Risiko und Rendite

= der Preis, der am Kapitalmarkt für Übernahme einer zusätzlichen Risikoeinheit verlangt wird

es gilt:

$$E(r_P) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_P$$

Zwei Sichtweisen für den gleichen Sachverhalt:

a) wenn σ_P = übernommene Risikomenge, dann:

$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$ = Marktpreis des Risikos

b) wenn $\frac{\sigma_P}{\sigma_M}$ = übernommene (relative) Risikomenge, dann:

$$E(r_M) - r_f$$ = Marktpreis des Risikos

→ somit also linearer Zusammenhang zwischen Risiko eines individuellen effizienten Portefeuilles und der erwarteten Rendite dieses Portefeuilles

Risikoprämie zusätzlich zu r_f ergibt sich somit durch den Term: $\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_P$

<u>Anwendung der Kapitalmarktlinie für:</u>

bestmöglich diversifizierten Investor,
d.h. Halten eines best. Anteils am Marktportefeuille und Bestimmung der Risikomenge des Gesamtportefeuilles über α

1.3 Herleitung der Wertpapierlinie (CAPM)

die Wertpapierlinie baut auf Ansatz der Kapitalmarktlinie auf

das Modell bezieht sich auf Renditen nicht effizienter Positionen/Portefeuilles

es gilt:
Diversifikation beseitigt das unsystematische Risiko eines Portefeuilles
→ auch bei nicht effizienten Positionen vergütet der Markt nur das systematische, nicht durch Diversifikation zu beseitigende Risiko

Grundsätzlich gilt für die Portefeuillevarianz:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, x_j \, \rho_{i,j} \, \sigma_i \, \sigma_j$$

→ mit steigender Zahl der Titel im Portefeuille (n) steigt der Beitrag der Kovarianzen zum Portefeuillerisiko

Für das Marktportefeuille gilt:

sehr großes n → $\sigma_M^2 = \sigma_{M,M} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \sigma_{i,M}$

→ die Kovarianzen bestimmen, welches Risiko ein einzelner Titel in das Marktportefeuille hineinträgt, also welchen Anteil am systematischen Risiko er erbringt

somit ist Kovarianz des risikobehafteten Einzeltitels mit der Marktrendite $_{i\ M}$ maßgebend für die Renditeerwartung

Beta β= relative Risikohöhe = $\beta_i = \dfrac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$

risikofreie Anlage: $\beta_{r_f} = 0$

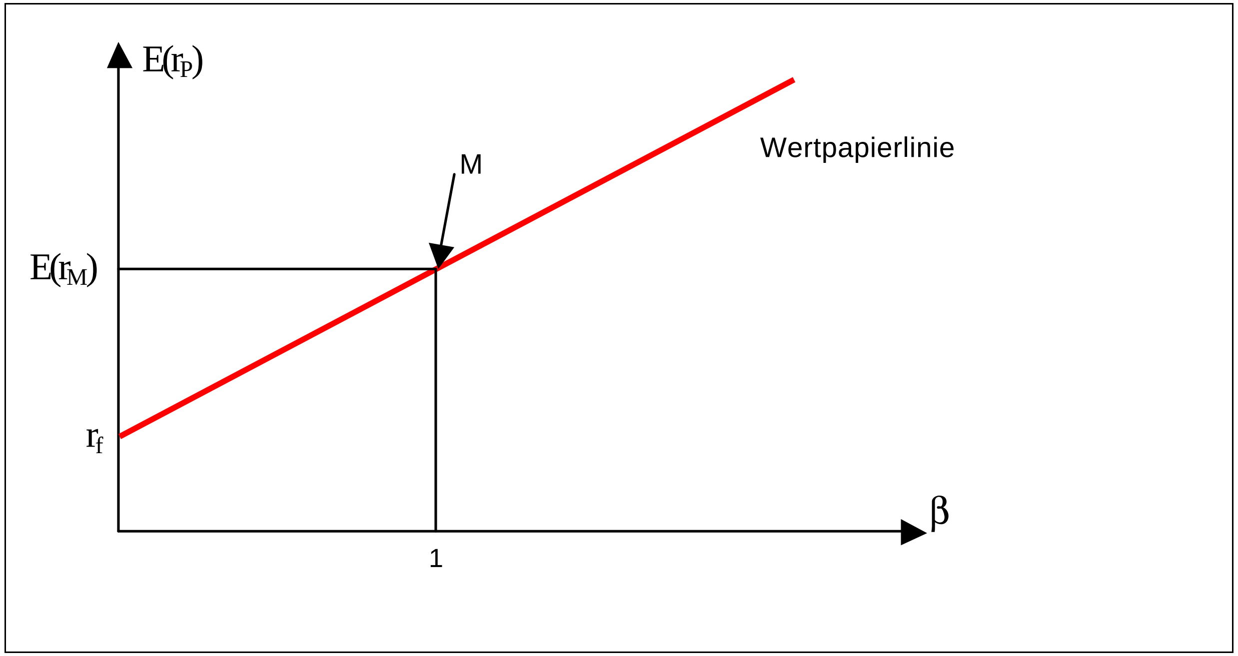
Marktportefeuille: $\beta_M = \dfrac{\sigma_{M,M}}{\sigma_M^2} = \dfrac{\sigma_M^2}{\sigma_M^2} = 1$

Somit:
Risikoprämie eines risikobehafteten Einzelinvestments ergibt sich als:
Marktpreis für die Übernahme von systematischem Risiko $\left(E(r_M) - r_f\right)$ multipliziert mit der relativen Risikohöhe des Einzeltitels β_i

es gilt Kapitalmarktgleichgewicht
→ d.h. Relation Risikoprämie zu relevanter Risikomenge ist für alle risikobehafteten Titel gleich

Somit zeigt die Wertpapierlinie einen linearen Zusammenhang zwischen Risiko und erwarteter Rendite eines Einzeltitels:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_M) - r_f)\beta_i$$



1.4 Zusammenhang
Kapitalmarktlinie – Wertpapierlinie:

Wenn das betrachtete Portefeuille perfekt mit Markt-portefeuille korreliert (also ρ = 1):
→effiziente Position, d.h. das Portefeuille bringt nur systematisches Risiko mit sich

→ die Wertpapierlinie geht in die Kapitalmarktlinie über:

Kapitalmarktlinie: $E(r_P) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_P$

Wertpapierlinie:

$$E(r_i) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2} \sigma_{i,M}$$

$$\Leftrightarrow E(r_i) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \frac{\rho \sigma_i \sigma_M}{\sigma_M}$$

bei ρ = 1 entspricht die gem. Wertpapierlinie ermittelte erwartete Rendite der gem. Kapitalmarktlinie ermittelten erwarteten Rendite einer Position

II. 2. Kritik am CAPM

Vorteile CAPM:

- Bestimmung erwarteter Rendite einzelner, **nicht effizienter Positionen** unter Berücksichtigung des Risikos

- **Trennung** systematisches/unsystematisches Risiko

- grundsätzlich **unabhängig von individuellen Risikopräferenzen** (lediglich Annahme der Risikoaversion)

- **konsistente Theorie** über die Beziehung von Risiko und Rendite von Anlagen

Nachteile/Probleme CAPM:

- stark von Realität **abstrahierende Annahmen**:
  - Grundmodell ist einperiodig
  - Annahme vollkommener Markt
  - homogene Erwartungen aller Marktteilnehmer
  - Anlage/Aufnahme zum Zins für risikofreie Anlagen unbegrenzt möglich
  - Leerverkäufe unbegrenzt zulässig
  - normalverteilte Renditen, alternativ quadratische Risiko-Nutzen-Funktion der Anleger

- Definition **Marktportefeuille**:
  - alle Anlagen werden am Markt gehandelt
  - Anzahl der Titel unveränderlich
  - alle Anlagen unbegrenzt teilbar

- **Datenermittlung** (Korrelationskoeffizienten/Beta)

- nur **eindimensionale Analyse** des systematischen Risikos

III. Arbitrage Pricing Theory (APT)

1. Darstellung des Modells

alternatives Modell zum CAPM

Ziel:
Bestimmung erwarteter Renditen einzelner Titel

Analyse des systematischen (gesamtmarktbezogenen) Risikos über mehrere Risikofaktoren

wertpapierspezifische Risikokomponente eines Titels (unsystematisches Risiko) in Störgröße ε_i

grundsätzlich gilt formal:

$$r_i = E(r_i) + b_{i,1} F_1 + \ldots + b_{i,k} F_k + \varepsilon_i$$

→ Abweichungen der tatsächlich realisierten Wertpapierrendite von der vorher erwarteten Rendite aufgrund von *k* gesamtmarktbezogenen Risikofaktoren sowie der wertpapierspezifischen Störgröße ε_i

Annahmen der APT

- vollkommener Markt
- Marktteilnehmer erwarten alle, daß die Rendite der Titel durch die APT dargestellt wird
- Leerverkäufe und Anlage/Aufnahme zum Zins auf risikofreie Anlagen unbegrenzt möglich
- wertpapierspezifische Risikokomponente ε_i von makroökonomischen Risikofaktoren sowie den wertpapierspezifischen Risikokomponenten der anderen Titel unabhängig
- es gibt keine Arbitragemöglichkeiten in dem Sinn, daß keine Portefeuilles existieren, die ohne Kapitalbindung und ohne Risiko im Durchschnitt eine positive Rendite erzielen
- die Arbitrageportefeuilles sind sehr gut diversifiziert, d.h. unsystematisches Risiko vernachlässigbar

Ein **Arbitrageportefeuille** gem. APT besteht aus n Titeln, wobei gilt: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ sowie $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$

mit x_i Anteil der Aktie i am Volumen der insgesamt durchgeführten Käufe/Verkäufe

→ d.h. keine zusätzliche Kapitalbindung (Leerverkäufe und/oder Verkäufe)

weiterhin muß für das Arbitrageportefeuille gelten:
Sensitivität der Rendite des Arbitrageportefeuilles gegenüber den Ausprägungen aller Risikofaktoren Null, d.h. Anteile der Titel entsprechend zu wählen, also:

$\sum_{i=1}^{n} x_i b_{i,j} = 0$ mit $i, j = 1, \ldots, K$

gem. Annahmen ist unsystematisches Risiko vernachlässigbar

→ es ergibt sich für die Rendite des Arbitrageportefeuilles aus Arbitrageüberlegungen Null, also:

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) = 0$$

Die erwartete Rendite einer einzelnen nicht effizienten Anlage ergibt sich wie folgt:

$$E(r_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i,1} + \ldots + \lambda_k b_{i,k}$$

- der konstante Teil λ_0 entspricht der Rendite auf risikofreie Anlagen (hier gilt für alle Risikofaktor-Sensitivitäten $b_i = 0$)
- weiterhin Linearkombination der erwarteten faktorbezogenen Risikoprämien λ_k mit den jeweiligen Faktorsensitivitäten

jede Risikoprämie λ_k bezieht sich auf einen Risikofaktor

die Risikoprämie λ_k entspricht der Risikoprämie eines Portefeuilles, dessen Rendite bezüglich des Risikofaktors F_k eine Sensitivität von 1 aufweist und von allen anderen Risikofaktoren nicht beeinflußt wird

Somit ergibt sich für die Renditeerwartung eines einzelnen, risikobehafteten Investitionsobjektes:

$$E(r_i) = r_f + \sum_{k=1}^{K} \left[E(r_{P,k}) - r_f \right] b_{i,k}$$

2. Kritik an der APT

Vorteile APT:

- erfordert keine Annahmen **bezüglich Verteilung der Renditen bzw. der Risiko-Nutzen-Funktion** der Anleger

- verlangt **nicht die Bildung effizienter Portefeuilles**

- erlaubt **differenzierte Betrachtung** der verschiedenen **Risikofaktoren**
  → Risiko eines Portefeuilles besser auf Anlegerpräferenzen anpaßbar

Nachteile/Probleme APT:

- Ermittlung der relevanten **makroökonomischen Risikofaktoren**
  → als zentral gelten:
  unerwartete Änderungen
    - im Zinsniveau
    - im Spread zwischen kfr. und lfr. Zinssätzen
    - im Wechselkurs
    - im realen Bruttosozialprodukt
    - in der Inflation

- **Datenerhebung**: Faktorsensitivitäten der einzelnen Titel

IV. Schlussbetrachtung und Ausblick.

Portfoliotheorie gehört zu den grundlegenden Konzepten der Investitionsplanung unter Risiko, die wird immer dynamisch entwickelt. Für ihre Arbeiten zur modernen Portfoliotheorie erhielten Markowitz und Sharpe 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Grenzen der Portfoliotheorie:

1. Abweichung der praktischen Anwendungen von der Portfoliotheorie,
   z.B. dominierende aktive Anlagemanagement, weil Kapitalmärkte nicht so effizient sind.
2. zweifelhafte theoretische Annahmen und zukunftbezogenen Schätzungen.

Zukunftsperspektiven

- Dramatischere Spezialisierung, die sog. Financial Engineering, braucht hochspezialisierte Unternehmen und Individuen.
- Entwicklungen der modernen Informationen- und Kommunikationstechnologie haben erhebliche Auswirkungen auf die finanziellen Gestaltungsmöglichkeiten auf die Kunden.
- Weitgehend globalisierter Markt und internationale Konkurrenz.